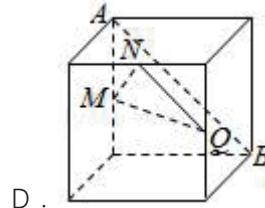
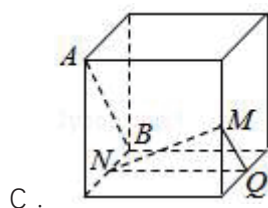
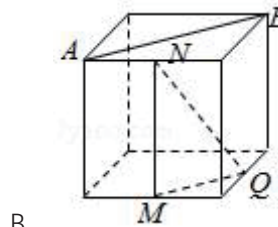
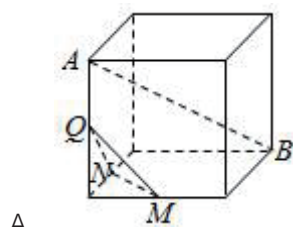
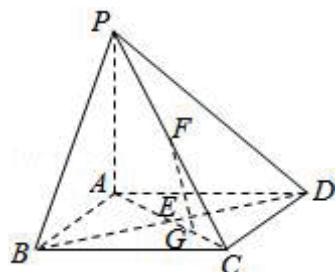


## 第 9 讲：立体几何平行问题方法梳理

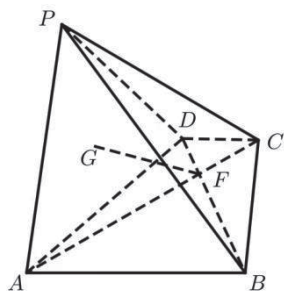
1. (2017 全国 1 文) 如图，在下列四个正方体中， $A, B$  为正方体的两个顶点， $M, N, Q$  为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线  $AB$  与平面  $MNQ$  不平行的是 ( )



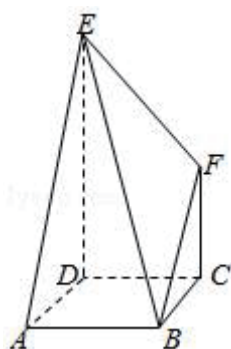
2. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为菱形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $BD$  交  $AC$  于点  $E$ ， $F$  是线段  $PC$  中点， $G$  为线段  $EC$  中点。求证： $FG \parallel$  平面  $PBD$



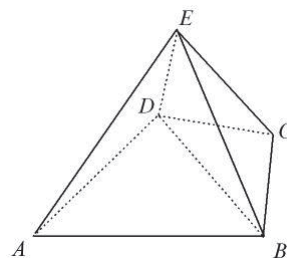
3. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  为梯形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2$ ， $DC = 2\sqrt{3}$ ， $AC \cap BD = F$ ，且  $\triangle PAD$  与  $\triangle ABD$  均为正三角形， $G$  为  $\triangle PAD$  的重心，求证： $GF \parallel$  平面  $PDC$ ；



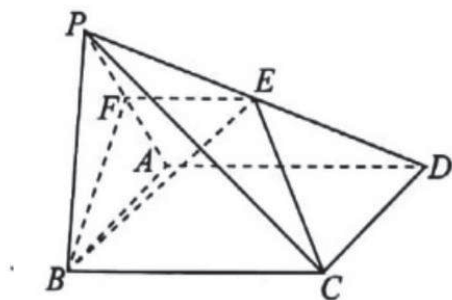
4. 如图，平面  $CDEF \perp$  平面  $ABCD$ ，四边形  $ABCD$  是平行四边形  $CDEF$  为直角梯形，  
 $\angle ADC = 120^\circ$ ,  $CF \perp CD$ , 且  $CF \parallel DE$ ,  $AD = 2DC = DE = 2CF$ . 求证：  $BF \parallel$  平面  $ADE$  ；



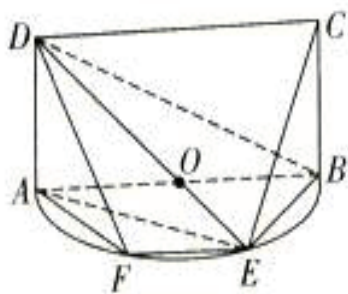
5. 如图，几何体  $E-ABCD$  是四棱锥， $\triangle ABD$  为正三角形， $CB = CD$ ,  $EC \perp BD$ .  
 若  $\angle BCD = 120^\circ$ ， $M$  为线段  $AE$  的中点，  
 求证：  $DM \parallel$  平面  $BEC$  .



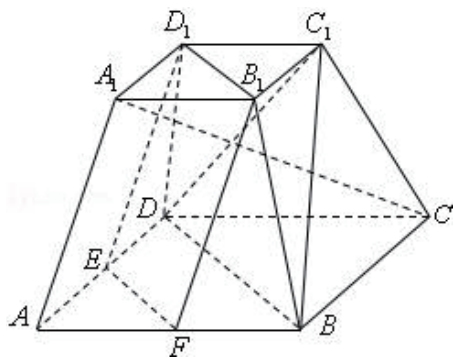
6. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形，平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ，点  $E$  是  $PD$  的中点，棱  $PA$  与平面  $BCE$  交于点  $F$ . 求证：  $AD \parallel EF$  ；



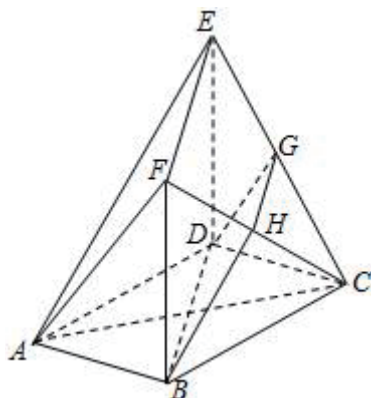
7. 如图，半圆  $O$  的直径  $AB$  长为 2， $E$  是半圆  $O$  上除  $A, B$  外的一个动点，矩形  $ABCD$  所在的平面垂直于该半圆所在的平面，且  $\tan \angle DBA = \frac{1}{2}$ ，设平面  $ECD$  与半圆弧的另一个交点为  $F$ 。求证： $EF \parallel BA$ ；



8. 如图，在正四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $A_1B_1 = a, AB = 2a, AA_1 = \sqrt{2}a$ ， $E, F$  分别是  $AD, AB$  的中点。求证：平面  $EFB_1D_1 \parallel$  平面  $BDC_1$ ；

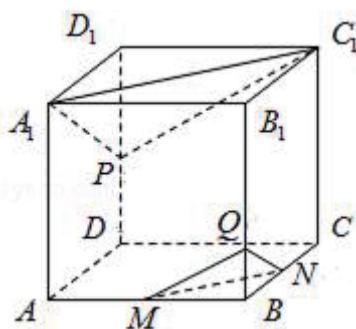


9. 如图，在多面体  $ABCDEF$  中，底面  $ABCD$  是正方形，四边形  $BDEF$  是矩形，平面  $BDEF \perp$  平面  $ABCD$ ,  $G$  和  $H$  分别是  $CE$  和  $CF$  的中点. 求证：平面  $BDGH \parallel$  平面  $AEF$ .



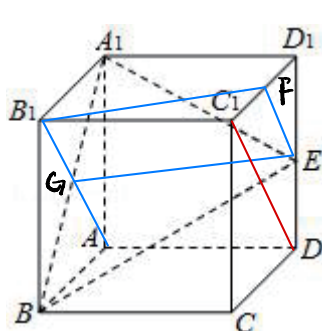
10. 如图，正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $M, N$  分别为  $AB, BC$  中点.

- (I) 当点  $P$  在棱  $DD_1$  上运动时，是否都有  $MN \parallel$  平面  $A_1C_1P$ ，证明你的结论；  
 (II) 若  $P$  是  $DD_1$  的中点，若  $Q$  是  $BB_1$  的四等分点，且  $B_1Q = 3QB$ ，求证：平面  $MNQ \parallel$  平面  $A_1C_1P$ .



11. 如图所示，在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $E$  是棱  $DD_1$  的中点.

- (1) 求异面直线  $BE$ 、 $A_1B_1$  所成角的余弦值；  $\cos \theta = \frac{AB}{BE}$   
 (2) 在棱  $C_1D_1$  上是否存在一点  $F$ ，使  $B_1F \parallel$  平面  $A_1BE$ ？证明你的结论.



$$B_1G \parallel EF \parallel \frac{1}{2}C_1D_1$$

$\downarrow$

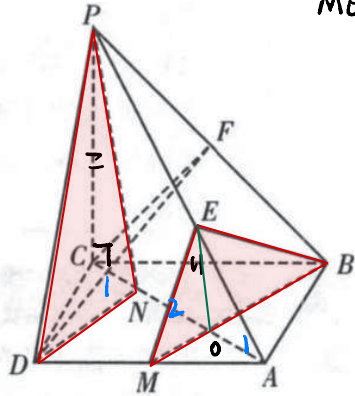
$$B_1G \parallel \frac{1}{2}C_1D_1$$

四边形  $B_1FE G$  为  $\square$

$$\therefore B_1F \parallel GE$$

$$\therefore B_1F \parallel \text{面 } A_1BE$$

12. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PC \perp$  底面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  是矩形， $BC=PC$ ， $E, F$  分别是  $PA, PB$  的中点。已知点  $M$  是  $AD$  的中点，点  $N$  是  $AC$  上一动点，当  $\frac{CN}{AC}$  为何值时，平面  $PDN \parallel$  平面  $BEM$ ？



ME 中位线

$\therefore$  面  $PDN \parallel$  面  $BEM$

面  $PDN \cap$  面  $PAC = PN$

面  $BEM \cap$  面  $PAC = EO$

$\therefore PN \parallel EO$

$\because E$  为  $AP$  中点

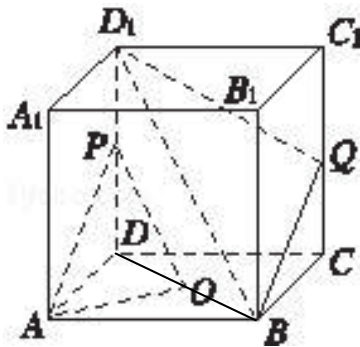
$\therefore O$  为  $AN$  中点

$\because \triangle OAM \sim \triangle OCB, \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{CN}{AC} = \frac{1}{3}$

13. 如图，在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $O$  为底面  $ABCD$  的中心， $P$  是  $DD_1$  的中点，设  $Q$  是  $CC_1$  上的点，问：当点  $Q$  在什么位置时，平面  $D_1BQ \parallel$  平面  $PAO$ ？



$PO \parallel BD_1$

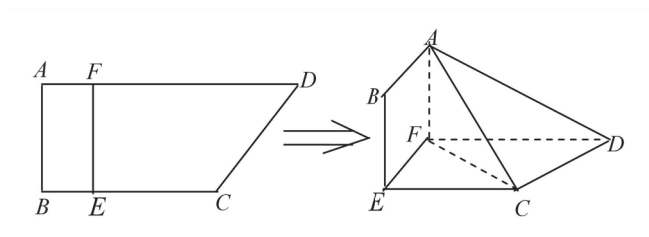
当  $Q$  为中点时

$AP \perp BQ$

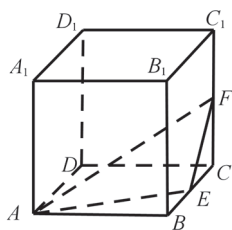
14. 如图，四边形  $ABCD$  中， $AB \perp AD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD=8$ ， $BC=6$ ， $AB=2$ ， $E, F$  分别在  $BC, AD$  上， $EF \parallel AB$ 。现将四边形  $ABEF$  沿  $EF$  折起，使得平面  $ABEF \perp$  平面  $EFDC$ 。

- (1) 当  $BE=2$ ，是否在折叠后的  $AD$  上存在一点  $P$ ，且  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PD}$ ，使得  $CP \parallel$  平面  $ABEF$ ？若存在，求出  $\lambda$  的值；若不存在，说明理由；

(II) 设  $BE = x$ , 问当  $x$  为何值时, 三棱锥  $A-CDF$  的体积有最大值? 并求出这个最大值.

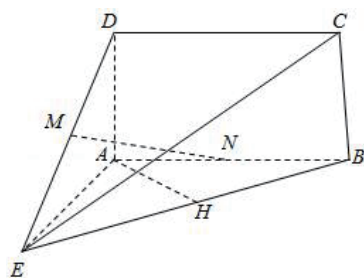


15. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $E, F$  分别是棱  $BC, CC_1$  的中点,  $P$  是侧面  $BCC_1B_1$  内一点, 若  $A_1P \parallel$  平面  $AEF$ , 则线段  $A_1P$  长度的取值范围是\_\_\_\_\_.



作业:

1. 如图, 矩形  $ABCD$  所在平面与三角形  $ABE$  所在平面互相垂直,  $AE = AB$ ,  $M, N, H$  分别为  $DE, AB, BE$  的中点. 求证:  $MN \parallel$  平面  $BEC$ ;



2. 如图所示, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形, 侧棱  $PA$  垂直于底面,  $E, F, G$  分别是  $AB, PC, CD$  的中点. 求证: 平面  $EFG \parallel$  平面  $PAD$ .

